TP 6 - Polynômes, fractions rationnelles, interpolation

Exercice 1. Calculer
$$\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i^3}{x_i^4 - 1},$$
où x_1, x_2, x_3, x_4 sont les racines du polynôme $X^4 - X^2 + 3$. On utilisera la fonction *solve* pour trouver les racines.

Exercice 2. On considère la fonction polynomiale $x \mapsto x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1$ dont 1 est racine. Déterminer à quel ordre 1 est racine. En déduire une factorisation par une puissance de $(x-1)$ pour $n = 20$ dans l'ensemble des réels. On pourra utiliser la syntaxe de boucle :

while conditions **do** instructions **od;**

Exercice 3. On commence par rappeler les théorèmes de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Théorème (de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)**.** *Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On suppose que Q admet la factorisation*
$$Q(X) = (X - z_1)^{n_1} \dots (X - z_p)^{n_p} (X^2 - \beta_1 X + \gamma_1)^{m_1} \dots (X^2 - \beta_q X + \gamma_q)^{m_q},$$
où les polynômes $X^2 - \beta_j X + \gamma_j$ n'ont pas de racines réelles. Alors il existe un unique polynôme T, et d'uniques réels $(a_{i,k})_{\substack{i=1,\dots,p\\ k=1,\dots,n_i}}$, $(b_{j,l})_{\substack{j=1,\dots,q\\ k=1,\dots,m_j}}$ et $(c_{j,l})_{\substack{j=1,\dots,q\\ k=1,\dots,m_j}}$ tels que
$$\frac{P}{Q} = T + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{i,k}}{(X - z_i)^k} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{m_j} \frac{b_{j,l} X + c_{j,l}}{(X^2 - \beta_j X + \gamma_j)^k}.$$

Exemple.
$$\frac{X^3 - X + 2}{(X-1)^3 (X^2 + X + 1)^2} = \frac{11}{27(X-1)} - \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{2}{9(X-1)^3} - \frac{11X + 16}{27(X^2 + X + 1)} - \frac{7X + 5}{9(X^2 + X + 1)^2}.$$

Théorème (de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)**.** *Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que Q admet la factorisation*
$$Q(X) = (X - z_1)^{n_1} \dots (X - z_p)^{n_p}.$$
Alors il existe un unique polynôme T, et d'uniques complexes $(a_{i,k})_{\substack{i=1,\dots,p\\ k=1,\dots,n_i}}$ tels que
$$\frac{P}{Q} = T + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{i,k}}{(X - z_i)^k}.$$

Exemple. *Puisque $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$, avec $j = e^{\frac{i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, on a la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ suivante :*
$$\begin{aligned}\frac{X^3 - X + 2}{(X-1)^3 (X^2 + X + 1)^2} &= \frac{11}{27(X-1)} - \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{2}{9(X-1)^3} \\ &\quad - \frac{11 - 9\sqrt{3}i}{54(X - j)} + \frac{3 + 7\sqrt{3}i}{54(X - j)^2} \\ &\quad - \frac{11 + 9\sqrt{3}i}{54(X - j^2)} + \frac{3 - 7\sqrt{3}i}{54(X - j^2)^2}.\end{aligned}$$

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles $1/(X^7 + 27X^4 - X^3 - 27)$ et $1/(X^4 + X^2 + 1)$. Pour la décomposition réelle on utilisera la commande *convert*$(P(X)/Q(X)$,*parfrac*,$X)$. Pour la décomposition complexe, on utilisera la même commande, mais après avoir factorisé Q dans l'ensemble des complexes.

Exercice 4. Le but de cet exercice est d'étudier différentes interpolations polynomiales pour approcher la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

- Définir la fonction et tracer son graphe sur $[-1, 3]$.
- Calculer son développement de Taylor à l'ordre 10 au voisinage de 0 (utiliser la fonction *taylor*). Convertir ce polynôme en fonction $q(x)$ (utiliser *convert* avec l'option *polynom* pour supprimer le dernier terme), puis comparer graphiquement t et f sur plusieurs intervalles. Que se passe-t-il sur $[-5, 5]$?
- Générer un ensemble E_N de $N = 5$ points régulièrement répartis sur l'intervalle $[1/3, 5/3]$, puis l'ensemble F_N des images de ces points par f.
- Calculer le polynôme p d'interpolation associé à E_N et à F_N (utiliser la fonction *interp*$(E_N$,F_n,$x)$).
- Tracer les graphes de p et f sur l'intervalle $[-1, 3]$.
- Faire le même travail avec $N = 10$, $N = 20$. On pourra faire une procédure.

Exercice 5. Soient a, b, c les zéros distincts ou confondus de $x^3 + px + q$. Calculer, pour n donné, $a^n + b^n + c^n$ en fonction de p et q. Indications : utiliser la fonction *solve* pour trouver les racines, appliquer alors la transformation $u \to u^n$ à la suite des racines, puis convertir la liste obtenue en somme.